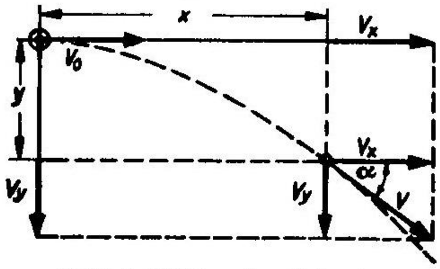
Berechnung von Pfeilgeschwindigkeiten und Wurfweiten

<u>in Abhängigkeit von Abschusskraft, Pfeilbefiederung und Schusswiderständen</u>

Für die Berechnungen werden die Formeln für <u>widerstandsfreien</u> horizontalen und schrägen Wurf sowie der Energiesatz aus dem Buch „**Dynamik** von Heinrich Rödel, Georg-Westermann-Verlag, Braunschweig, 1960“ benutzt.

1. <u>Widerstandsfreier</u> horizontaler Wurf:

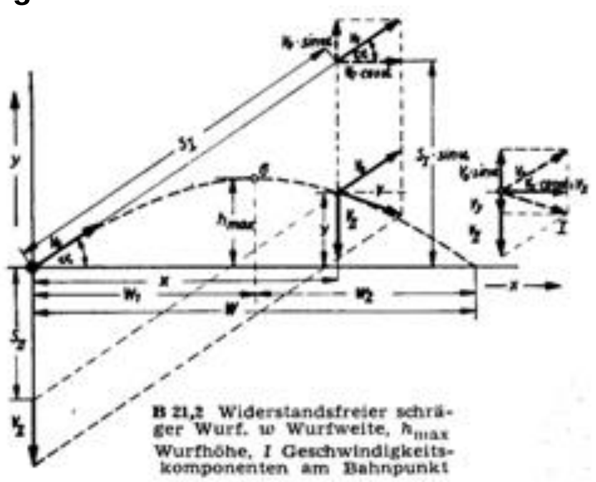


B 20,3 Widerstandsfreier horizontaler Wurf

(I) $\mathbf{y = g/2v_o^2 \cdot x^2 \longrightarrow v_0 = x \cdot (g/2y)^{1/2}}$

mit **y** = Abweichung aus der Waagerechten,
$\mathbf{v_0}$ = Abschussgeschwindigkeit und
x = Wurfweite.

2. <u>Widerstandsfreier</u> schräger Wurf:



B 21,2 Widerstandsfreier schräger Wurf. w Wurfweite, h_{max} Wurfhöhe, I Geschwindigkeitskomponenten am Bahnpunkt

(II) $\mathbf{w = (v_0^2 \cdot \sin 2\alpha)/g}$ **(=** ***Wurfparabel*** für die Wurfweite**),**

(III) $\mathbf{y = x \cdot tg\alpha - (x^2 \cdot g)/(2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha)}$ **(=** ***Wurfhöhe*** bei x**)** und

(IV) $\mathbf{h_{max} = v_0^2 \cdot \sin^2\alpha/(2 \cdot g)}$ **(=** ***maximale Wurfhöhe*** bei w/2**)**

mit **w** = Wurfweite,
$\mathbf{v_0}$ = Abschussgeschwindigkeit und
α = Abschusswinkel zur Waagerechten

3. Energiesatz: **(V)** $\mathbf{E_0 = \Delta F \cdot s = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 + \Sigma E_P}$

mit $\Delta \boldsymbol{F}$ = Kraftdifferenz zwischen Abschusskraft $\boldsymbol{F_A}$ bei Vollauszug und Kraft $\boldsymbol{F_S}$ bei Standhöhe ***h***.
$\boldsymbol{\Delta F = (F_A + F_S)/2}$; $\boldsymbol{F_S = 1kg}$
s = Ausziehlänge; ***s*** +***h*** = Pfeillänge ***l***
m = Pfeilmasse = G/g und
$\boldsymbol{v_0}$ = Abschussgeschwindigkeit.
$\mathbf{\Sigma E_P}$ **=** Summe der potentiellen Energien

4. <u>Widerstandsbehafteter</u> horizontaler Wurf:

Die in der nachfolgenden Betrachtung genannten Zahlenwerte stammen von meinem Recurve-Bogen Martin **X200** und Schussversuchen mit verschiedenen Pfeilen.

<u>Andere Bögen oder/und Pfeile können abweichende Werte ergeben.</u>

Mit der potentiellen Anfangsenergie $\mathbf{E_0 = \Delta F \cdot s}$ wird der Pfeil von der Sehne gelöst, wozu eine Lösekraft $F_L = 0{,}5\ kg$ (gemessen) erforderlich ist.
Die potentielle Anfangsenergie wird gemindert um verschiedene Verlustenergien ΣE_P.
Diese setzen sich zusammen aus:

1. Der <u>Löseenergie</u> E_L über die Nocklänge $l_N = 0{,}0\ 1m$: $E_L = F_L \cdot l_N$,
2. der <u>Widerstandsarbeit</u> E_W am Bogenfenster mit der Reibkraft $F_W = 0{,}2kg$ über die Standhöhe $h = 0{,}24m$: $E_W = F_W \cdot h$.
   (Mit „*Standhöhe*“ ist der Abstand von der Sehne bis zur sehnenabgewandten Seite des Bogengriffstückes am Bogenfenster gemeint.),
3. der <u>Luftwiderstandsarbeit</u> E_{LW} während des Pfeilfluges mit dem Luftwiderstand F_{LW} über die Strecke x.
   Der Luftwiderstand ist bei Schussbeginn groß, bei Schussende annähernd 0.
   Die <u>Luftwiderstandsarbeit</u> wird deshalb angesetzt zu $E_{LW} = F_{LW}/2 \cdot x$.
4. der <u>Eindringarbeit</u> E_E in den Boden mit der Eindringkraft $F_E \sim 1{,}5kg$ und der Eindringtiefe t_E: $E_E = F_E \cdot t_E$.
   Die Eindringkraft ist gleichgesetzt mit der <u>gemessenen</u> Ausziehkraft des Pfeils aus dem Boden,
   Die Pfeile mit der Länge l dringen bis zur Befiederung in den Boden ein, so dass die Eindringtiefe $t_E \sim l - 0{,}15m$ ***(Befiederungslänge = Länge vom Nock bis zum vorderen Ende der Befiederung)***.

Damit wird die <u>Eindringarbeit</u> zu $E_E = F_E \cdot (l - 0{,}15)$.

Daraus ergibt sich:

$$\Sigma E_P = E_L + E_W + E_{LW} + E_E$$
$$E_L = F_L \cdot l_N;\ E_W = F_W \cdot h;\ E_{LW} = F_{LW}/2 \cdot x,\ E_E = F_E \cdot t_E$$

Die verbleibende potentielle Energie ist äquivalent der kinetischen Energie für den eigentlichen Pfeilflug über die Strecke x: $E_{Kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2$.

Es gilt also:

$$\Delta F \cdot s = E_{Kin} + E_L + E_W + E_{LW} + E_E; \longrightarrow$$
$$\Delta F \cdot s = \tfrac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 + F_L \cdot l_N + F_W \cdot h + F_{LW}/2 \cdot x + F_E \cdot t_E; \longrightarrow$$
$$F_{LW} = (((\Delta F)/2) \cdot s - \tfrac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 - F_L \cdot l_N - F_W \cdot h - F_E \cdot t_E)/2x \longrightarrow$$
$$\text{(VI)}\quad F_{LW} = (((F_A + F_S)/2) \cdot s - \tfrac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 - F_L \cdot l_N - F_W \cdot h - F_E \cdot t_E)/2x$$

Mit meinem Recurve-Bogen Martin **X200** und verschiedenen Pfeilen wurden bei trockenen Wetter Versuche geschossen, ausgehend von den Gegebenheiten bei waagerechten Wurf.
Als „**y = 1,55m**“ (Abweichung **y** aus der Waagerechten) wurde die Nockpunkthöhe über dem Boden angesehen, als Wurfweite **x** die Entfernung vom Abschusspunkt bis zur Eindringstelle des Pfeiles in den Boden.
Die Abschusskräfte wurden für die etwas unterschiedlichen Pfeillängen gemessen, ebenso die zugehörigen Ausziehlängen **s**.
Die Wurfweiten x_n von je 3 Schüssen wurden gemessen, und daraus wurde ein Mittelwert x_m gebildet.
Mit den gemessenen Werten wurde die Tabelle 1 erstellt.

Tabelle 1: Versuchsergebnisse

Pfeil*	Länge l [mm]	Gewicht [g]	s [mm]	F_A [kg]	ΔF [kg]	x [m]				Befiederung		v_0 [m/s]	F_{LW} [kg]
						x_1	x_2	x_3	x_m	Natur	Plast		
A 1516	635	17	395	17	9	31,5	31,4	29,2	30,7		2,5“	54,7	0,003
A 1816	740	24	500	21	11	32	32,8	32,5	32,4		2,5“	57,6	0,003
A1914	725	23	485	20	10,5	32,7	33,2	33,1	33,0		2“	58,7	0,002
A 2016	735	30	495	20,5	10,75	29,3	29,6	29,2	29,4	5“		52,2	0,004
A 2114	715	29	475	19	10	27,9	27,8	28,0	27,9	5“		49,7	0,004
A 2115	730	30	490	20	10,5	28,5	28,8	29,1	28,8	5“		51,2	0,004
C Classic	715	26	475	19	10	29,5	31	31	29,7		4“	52,8	0,003
*Schaftmaterial: A = Aluminium; C = Karbon													

Mit dem für Hoch-/Weitschüsse (Clout-Schießen) präparierten Pfeil A 1914 ist beim schrägen <u>widerstandsfreien</u> Wurf eine Wurfweite ***w*** bei ***α = 45°*** mit $\mathbf{w = v_0^2/g \bullet \sin 2\alpha}$ von maximal

$$\underline{w}_{max} = 58{,}7^2/9{,}81 \bullet \sin 90° = \underline{351m}$$ zu erreichen.

Bei einer Wurfweite **w = 165m** ist ein Abschusswinkel von **α = 15,6°** erforderlich.

5. <u>Widerstandsbehafteter</u> schräger Wurf:

Aus $\mathbf{w = v_0^2/g \bullet \sin 2\alpha}$ und $\mathbf{E_0 = \Delta F \bullet s = ½ \bullet m \bullet v_0^2 + \Sigma E_P}$ folgen:

$$v_0^2 = 2 \bullet (\Delta F \bullet s - \Sigma E_P)/m \text{ und } w = ((2 \bullet (\Delta F \bullet s - \Sigma E_P)/m)/g) \bullet \sin 2\alpha \longrightarrow$$

$$w = (2 \bullet \Delta F \bullet s - \Sigma E_P)/G \bullet \sin 2\alpha \longrightarrow$$

$$w = 2 \bullet \sin 2\alpha/G \bullet (\Delta F \bullet s - \Sigma E_P) \longrightarrow$$

$$w = 2 \bullet \sin 2\alpha \bullet (\Delta F \bullet s - E_L - E_W - E_E)/G - (2 \bullet \sin 2\alpha \bullet E_{LW})/G$$

Die Eindringtiefe t_E beträgt versuchsgemäß nur noch ca. 0,2m, die Eindringkraft F_E (= Ausziehkraft) ~ 0,5kg.

Der Luftwiderstand $F_{LW}/2$ wirkt über die gesamte Flugbahnkurve. Gerechnet wird mit der *Kurvensehne w*. Die wahre Flugbahnkurve b ist nur mit komplizierter Infinitesimalrechnung zu bestimmen.
Es wird deshalb <u>*ohne wesentlichen Fehler*</u> mit der Kurvensehne w gerechnet mit folgender Begründung:

Das Verhältnis $\mathbf{i = h_{max}/w_{max}}$ (maximale Wurfhöhe $\mathbf{h_{max} = v_0^2 \bullet \sin^2\alpha/(2 \bullet g)}$ zu maximaler Wurfweite $\mathbf{w = (v_0^2 \bullet \sin 2\alpha)/g}$ für **α = 45°**) beträgt
$\mathbf{i = \sin^2\alpha/2 \bullet \sin 2\alpha = 0{,}25}$; oder anders ausgedrückt: $\mathbf{h_{max} = 0{,}25 \bullet w_{max}}$,
d. h., die Flugkurve ist deutlich flacher als ein Kreisbogen über 180°, für den h = 0,5 • w wäre.
Ein Kreisbogen b_{Kreis} hätte eine Länge von $b_{Kreis} = (2h)/2 = (w \bullet \pi)/2 = 1{,}57 \bullet w$.
Berücksichtigt man diesen Wert in der Entwicklung der unten stehenden Formel für w, so ergäbe sich für das Verhältnis $\mathbf{i´} = \mathbf{w_{Sehne}/b_{Kreis}}$ ein Wert von
i´ = 1,000099, d. h., der Fehler betrüge gerade 0,01%, wenn die Flugkurve ein Kreisbogen wäre. Tatsächlich ist der Fehler jedoch noch kleiner, da die Flugkurve flacher verläuft als ein Kreisbogen.

Es kann deshalb mit unten stehender Formel (VII) für w gerechnet werden.

$$\longrightarrow w = 2 \cdot \sin 2\alpha \cdot (\Delta F \cdot s - E_L - E_W - E_E)/G - (2 \cdot \sin 2\alpha \cdot F_{LW} \cdot w)/G$$
$$\longrightarrow w + w \cdot (2 \cdot \sin 2\alpha \cdot F_{LW})/G = 2 \cdot \sin 2\alpha \cdot (\Delta F \cdot s - E_L - E_W - E_E)/G$$
$$\longrightarrow w \cdot ((1 + (2 \cdot \sin 2\alpha \cdot F_{LW})/G) = 2 \cdot \sin 2\alpha \cdot (\Delta F \cdot s - E_L - E_W - E_E)/G$$

$$\text{(VIII)} \quad \longrightarrow w = \frac{2 \cdot \sin 2\alpha \cdot (\Delta F \cdot s - E_L - E_W - E_E)/G}{1 + (2 \cdot \sin 2\alpha \cdot F_{LW})/G}$$

Diese Formel ergibt mit dem für Hoch-/Weitschüsse (Clout-Schießen) präparierten Pfeil **A 1914** beim maximale Wurfweite ***w*** bei ***α = 45°*** von

$$\underline{w_{max}} = \underline{\mathbf{183m}}.$$

Diese Weite wurde bei Kontrollversuchen recht genau erreicht:
(Abweichung: ± 5m oder ± 2,7%)

Aus obiger Formel **(VIII)** für **w** ergibt sich durch Umformung:

$$w + w \cdot (2 \cdot \sin 2\alpha \cdot F_{LW})/G = 2 \cdot \sin 2\alpha \cdot (\Delta F \cdot s - E_L - E_W - E_E)/G$$
$$\longrightarrow w = 2 \cdot \sin 2\alpha \cdot (\Delta F \cdot s - E_L - E_W - E_E)/G - w \cdot (2 \cdot \sin 2\alpha \cdot F_{LW})/G$$
$$\longrightarrow w = \sin 2\alpha \cdot ((2 \cdot (\Delta F \cdot s - E_L - E_W - E_E)/G) - (2 \cdot F_{LW} \cdot w)/G))$$

$$\text{(IX)} \quad \longrightarrow \sin 2\alpha = \frac{w \cdot G}{2 \cdot ((\Delta F \cdot s - E_L - E_W - E_E) - F_{LW} \cdot w)}$$

Bei einer Wurfweite **w = 165m** ist ein Abschusswinkel von **α = 30,4°** erforderlich.

13.06.2010

Dieter Arnold